

**Муниципальный этап Всероссийской олимпиады школьников  
по математике – 2015/16.**

**Ответы, указания, решения.**

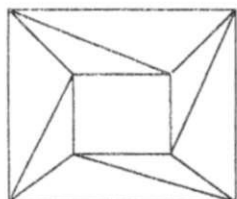
**7 класс**

**1. Ответ.** Например,  $1$  и  $\frac{1}{2}$ ;  $\frac{1}{2}$  и  $\frac{1}{3}$ ;  $\frac{1}{3}$  и  $\frac{1}{4}$ .

**2. Ответ.** Нельзя.

**Решение.** Первоначально в каждом сосуде четное число литров воды. После каждого “шага” в сосудах остается четное число литров. Если бы можно было перелить всю воду в один сосуд, то последним “шагом” надо было бы перелить в сосуд, содержащий 9 литров еще 9 литров из другого сосуда. Но сосуда, содержащего 9 литров, быть не может, так как 9 – нечетное число.

**3. Ответ.** Например,



**4. Ответ.** 32 года.

**Решение.** Если средний возраст 11 игроков 22 года, то тогда сумма возрастов 11 игроков – 242 года. Тогда как сумма 10 оставшихся на поле игроков 210 лет. Значит, удаленному игроку 32 года.

**5. Ответ.**  $x = 4$ ,  $y = 6$ .

**Решение.** Если  $x \geq 5$ , то последняя цифра десятичной записи числа  $x!$  равна 0, так в число сомножителей входит 5 и 2. Тогда последняя цифра  $x!+12$  равна 2. Но квадрат не может оканчиваться на 2. (Возможные последние цифры квадратов целых чисел – это 0, 1, 4, 5, 6, 9.) Значит, осталось проверить  $x = 1, 2, 3, 4$ :  $1+12$  – не квадрат,  $2+12$  – не квадрат,  $6+12$  – не квадрат,  $24+12 = 36$ ,  $y = 6$ .

**8 класс**

**1. Ответ.**  $\frac{20}{3}$ .

**Решение.** Обозначим искомое наименьшее число  $x$ , частное от деления  $x$  на  $\frac{10}{21}$  –  $n$ , частное от деления  $x$  на  $\frac{4}{15}$  –  $m$ . ( $n$  и  $m$  по условию целые числа.) Тогда  $x = \frac{10}{21}n$  и  $x = \frac{4}{15}m$ , откуда  $\frac{10n}{21} = \frac{4m}{15}$  или  $25n = 14m$ . Так как 25 и 14 взаимно простые числа, то  $n$  делится на 14, а  $m$  – на 25. Наименьшее возможное значение  $n$  равно 14 (а  $m = 25$ ), откуда  $x = \frac{10}{21} \cdot 14 = \frac{20}{3}$ .

## 2. Ответ. Нет.

**Решение.** Контрпример. Пусть выписано 24 числа -1 и число 4. Их сумма отрицательна, но они удовлетворяют условию задачи. Действительно, если выбрано три (-1), то в качестве четвертого числа надо взять 4. Если же выбраны две (-1) и 4, то в качестве четвертого числа берем -1.

## 3. Ответ. 2 рыцаря и 4 лжеца.

**Решение.** Заметим, что 1) граней (и обитателей планеты) – 6, 2) у каждой грани – по 4 соседних, 3) “большая часть” – это соотношение 3 к 1 или 4 к 0, 4) у противоположных граней – одинаковые соседи. Теперь: все лжецами быть не могут, так как тогда бы они все сказали правду. Значит, есть хотя бы один рыцарь. Тогда на противоположной грани – тоже рыцарь, так как иначе лжец бы сказал правду. Ситуация “два рыцаря на противоположных гранях и их 4 соседа – лжецы” удовлетворяет условию (для каждого из лжецов соотношение соседей 2 к 2 и, значит, они солгали). Среди этих четырех соседей не может быть рыцаря, так как на противоположной грани был бы и другой сосед – рыцарь, а это означало бы, что первый рыцарь солгал.

## 4. Ответ. 171819, 343536, 515253, 686970, 858687.

**Решение.** Пусть подряд выписаны числа  $n, n+1$  и  $n+2$ , то есть число  $N = n \cdot 10^4 + (n+1) \cdot 10^2 + (n+2)$ . Раскроем скобки:  $N = n \cdot (10101) + 102$ . Поскольку 102 делится на 17, то  $10101n$  должно делиться на 17. Так как 10101 и 17 взаимно просты,  $n$  должно делиться на 17. Такие двузначные числа – это 17, 34, 51, 68, 85, откуда ответ.

**5. Решение.** Пусть длины сторон треугольника  $a < b < c$ . Если  $b > \frac{3}{5}c$ , то все в порядке. Если же  $b \leq \frac{3}{5}c$ , то  $a > \frac{2}{5}c$  из-за того, что должно выполняться неравенство  $a + b > c$ . Тогда  $\frac{a}{b} > \frac{2c/5}{3c/5} = \frac{2}{3}$ . Но  $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$ , так что все доказано.

**Примечание.** Можно рассуждать от противного. Пусть утверждение задачи неверно. Тогда  $a < \frac{3}{5}b < \left(\frac{3}{5}\right)^2 c$ . Следовательно,  $a + b < \left(\frac{3}{5}\right)^2 c + \frac{3}{5}c = \frac{24}{25}c$ , что противоречит неравенству треугольника.

## 9 класс

### 1. Ответ. Например, 2, 3, 7, 43, 1806 или 2, 4, 5, 21, 420.

Действительно,  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{5}{6}$ ,  $\frac{5}{6} + \frac{1}{7} = \frac{41}{42}$ ,  $\frac{41}{42} + \frac{1}{43} = \frac{1805}{1806}$ ,  $\frac{1805}{1806} + \frac{1}{1806} = 1$ .

Или  $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ ,  $\frac{3}{4} + \frac{1}{5} = \frac{19}{20}$ ,  $\frac{19}{20} + \frac{1}{21} = \frac{419}{420}$ ,  $\frac{419}{420} + \frac{1}{420} = 1$ .

### 2. Ответ. 2015.

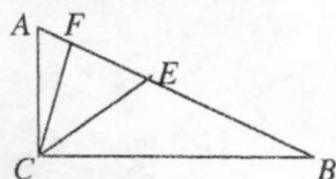
**Решение.**

$$\frac{2016! + 2013!}{2015! + 2014!} = \frac{2013!(2016 \cdot 2015 \cdot 2014 + 1)}{2014!(2015 + 1)} = \frac{2016 \cdot 2015 \cdot 2014 + 1}{2014 \cdot 2016} = 2015 + \frac{1}{2014 \cdot 2016}.$$

Отсюда ответ.

3. Ответ.  $45^\circ$ .

Решение



Обозначим углы  $A$  и  $B$  стандартно –  $\alpha$  и  $\beta$  соответственно,  $\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}$ . Из условия следует, что  $\angle AEC = \angle ACE$  и, значит,  $\angle ACE = \frac{\pi - \alpha}{2}$ . Аналогично,  $\angle BCF = \frac{\pi - \beta}{2}$ . Тогда искомый угол

$$\angle ECF = \angle ACE + \angle BCF - \frac{\pi}{2} = \frac{2\pi - \alpha - \beta}{2} - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi - \alpha - \beta}{2} = \frac{\pi - \frac{\pi}{2}}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

4. Ответ. 8, 9, 10, 11.

Решение. Пусть в турнире участвовало  $n$  команд. Тогда всего было сыграно  $\frac{n(n-1)}{2}$  игр, в каждой игре разыгрывалось 2 или 3 очка, а всего было набрано  $10n$  очков. Можем написать двойное неравенство  $2 \cdot \frac{n(n-1)}{2} \leq 10n \leq 3 \cdot \frac{n(n-1)}{2}$ , решая которое в целых числах, получим  $8 \leq n \leq 11$ . Осталось доказать, что все 4 варианта реализуются. Приведем единый пример для  $11 - k$  команд, где  $k = 0, 1, 2, 3$ : Расположим команды по кругу. Каждая пусть выиграет у  $k$  предыдущих, проиграет  $k$  следующим, остальные  $10 - 3k$  матчей завершит вничью.

Примечание. Приведенный пример не единственный.

5. Ответ.  $x = 3, y = 4, z = 5$ .

Решение. Из второго неравенства видно, что  $x > 2$ . Введем новые переменные:  $6 - z = a, z - y = b, y - x = c, x - 2 = d$ . Тогда новые переменные положительны,

удовлетворяют условию  $a + b + c + d = 4$  и система записывается так: 
$$\begin{cases} \frac{1}{c} + \frac{1}{b} \leq 2, \\ \frac{1}{a} \leq d. \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \begin{cases} \frac{b+c}{2} \leq bc, \\ ad \geq 1. \end{cases}$  Из первого неравенства и неравенства между средним арифметическим

и средним геометрическим  $\frac{b+c}{2} \geq \sqrt{bc}$  следует, что  $bc \geq 1$ , откуда следует, что

$b+c \geq 2$ . Тогда из условия  $a+b+c+d=4$  следует, что  $a+d \leq 2$ . Но из второго неравенства системы следует, что  $a+d \geq 2$ , значит,  $a+d=2, a=1, b=1$ . Тогда  $b+c=2, b=1, c=1$ , откуда  $x=3, y=4, z=5$ .

10 класс.

1. Ответ. Например, оценки по 3 предметам:

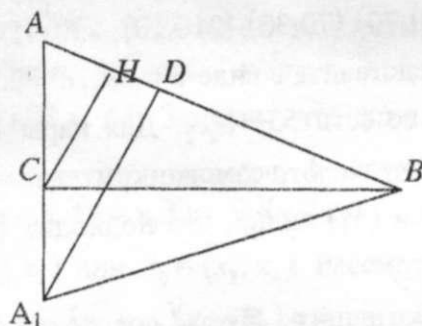
	1	2	3
A	5	4	3
B	4	3	5
C	3	5	4

Действительно, A лучше B по 1 и 2 предметам, B лучше C по 1 и 3 предметам, C лучше A по 2 и 3 предметам.

2. Ответ. 9.

**Решение.** Для любого натурального  $k$  верно  $\frac{k}{(k+1)!} = \frac{(k+1)-1}{(k+1)!} = \frac{1}{k!} - \frac{1}{(k+1)!}$ . Применяя формулу для  $k = 1, 2, 3, \dots, 2014$ , получим, что данная сумма равна  $\frac{1}{1!} - \frac{1}{2!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + \frac{1}{2014!} - \frac{1}{2015!} = 1 - \frac{1}{2015!}$ . Значит, требуемая несократимая дробь равна  $\frac{2015!-1}{2015!}$  и, так как десятичная запись числа  $2015!$  заканчивается нулем, в десятичной записи числителя последняя цифра – 9.

3. Решение.



Пусть в прямоугольном треугольнике  $ABC$  высота  $CH = h$ , гипотенуза  $AB = 4h$ . Построим треугольник  $A_1BC$ , симметричный треугольнику  $ABC$  относительно  $AB$ . Из точки  $A_1$  опустим перпендикуляр  $A_1D$  на гипотенузу  $AB$  (см. рис.) В треугольнике  $AA_1D$  отрезок  $CH$  – средняя линия, так что  $A_1D = 2h$ . В прямоугольном треугольнике  $A_1DB$  гипотенуза  $A_1B$  равна  $4h$ , а катет  $A_1D$  равен  $2h$ . Значит,  $\angle A_1DB = 30^\circ$ , а тогда  $\angle ABC = 15^\circ$ .

4. Ответ. –1.

**Решение.** Рассмотрим 8 любых идущих подряд чисел. Их сумма всегда одна и та же, поскольку остальные 260 чисел разбиваются на двадцатки подряд идущих. Рассмотрим 12 любых подряд идущих. Их сумма равна 75 минус сумма восьми, то есть тоже всегда одна и та же. Аналогично, 4 любые подряд идущие числа имеют одинаковую сумму (равную разности сумм 12 подряд идущих и 8 подряд идущих), и эта сумма равна  $\frac{75}{5} = 15$ . Так как  $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} = a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5}$ , то  $a_{k+1} = a_{k+5}$  для любого  $k$ , то все числа равны через четыре. (Суммирование номеров надо понимать “по модулю 268”, то есть за номером 268 идет не номер 269, а номер 1.) Таким образом,

равны все числа, имеющие равные остатки при делении на 4. Так, число 17 дает остаток 1, и все такие числа равны 3, число 83 дает остаток 3, и все такие числа равны 4, число 144 – остаток 0, все такие числа равны 9. Число 210 дает недостающий остаток 2, и все такие числа, в том числе и под номером 210, равны  $15 - 3 - 4 - 9 = -1$ .

**5. Решение.** Покажем, что для  $x > 0$  справедливо неравенство  $\frac{1}{2+x^3} \leq \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{1+x^2}$  (\*). Это неравенство равносильно неравенству  $2x^3 - 3x^2 + 1 \geq 0$ , которое верно, поскольку левая часть равна  $(2x+1)(x-1)^2$ . При этом равенство достигается, только если  $x = 1$ . Применяя (\*) к каждому слагаемому исходного неравенства в отдельности, получаем, что  $\frac{1}{2+a^3} + \frac{1}{2+b^3} + \frac{1}{2+c^3} \leq \frac{1}{3}$ . Осталось заметить, что не все числа  $a, b, c$  равны 1, поэтому в неравенстве знак строгий.

## 11 класс

**1. Ответ.**  $a = 10, b = 210, c = 22$ .

**Решение.** Из первых двух условий задачи следует, что  $a$  и  $b$  можно представить в виде  $a = 10a_1, b = 10b_1$ , где  $a_1$  и  $b_1$  взаимно простые числа и что  $210 = 10a_1b_1$ , то есть  $21 = a_1b_1$ . Для пары  $(a_1, b_1)$  есть 4 возможности:  $(1, 21), (3, 7), (7, 3), (21, 1)$ , откуда 4 возможности для пары  $(a, b)$ :  $(10, 210), (30, 70), (70, 30), (210, 10)$ . (\*) Из вторых двух условий задачи следует, что  $a$  и  $c$  можно представить в виде  $a = 2a_2, c = 2c_2$ , где  $a_2$  и  $c_2$  взаимно простые числа и что  $110 = 2a_2c_2$ , то есть  $55 = a_2c_2$ . Для пары  $(a_2, c_2)$  есть 4 возможности:  $(1, 55), (5, 11), (11, 5), (55, 1)$ , откуда 4 возможности для пары  $(a, c)$ :  $(2, 110), (10, 22), (22, 10), (110, 2)$ . (\*\*) Из (\*) и (\*\*) видно, что подходит только  $a = 10$ , следовательно,  $b = 210, c = 22$ .

**2. Решение 1.** Доказательство от противного. Пусть  $\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma > \sqrt{5}$ . Возведем оба неравенства в квадрат:  $\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma + 2(\sin \alpha \sin \beta + \sin \alpha \sin \gamma + \sin \beta \sin \gamma) \geq 4$ ;  $\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma + 2(\cos \alpha \cos \beta + \cos \alpha \cos \gamma + \cos \beta \cos \gamma) > 5$  и сложим их. Получим  $3 + 2(\cos(\alpha - \beta) + \cos(\alpha - \gamma) + \cos(\beta - \gamma)) > 9$ , то есть сумма трех косинусов больше 3, чего быть не может.

**Решение 2.** 1). Если какой-нибудь из синусов равен 1, то соответствующий косинус равен 0 и неравенство доказано, т.к.  $1 + 1 < \sqrt{5}$ . 2). Если какой-нибудь из синусов равен 0, то другие равны по 1 и см. предыдущий пункт. 3). Если какой-нибудь из косинусов отрицателен, то неравенство доказано см. выше. 4) Осталось рассмотреть случай, когда значения всех синусов и косинусов принадлежат промежутку  $(0; 1)$ . 5). Применим неравенство между средним арифметическим и средним квадратичным для трех

положительных чисел:  $\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$  (\*) (Доказательство:

\*)  $\Leftrightarrow (a+b+c)^2 \leq 3(a^2+b^2+c^2) \Leftrightarrow 2ab+2ac+2bc \leq 2a^2+2b^2+2c^2$ . Последнее получается, если сложить три неравенства  $2ab \leq a^2+b^2, 2ac \leq a^2+c^2, 2bc \leq b^2+c^2$ .)

$$\text{Итак, } \frac{2}{3} \leq \frac{\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma}{3} \leq \sqrt{\frac{\sin^2 \alpha + \sin^2 \beta + \sin^2 \gamma}{3}} = \sqrt{\frac{3 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \beta - \cos^2 \gamma}{3}},$$

$$\text{откуда } \cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma \leq \frac{5}{3}. \quad \text{Теперь}$$

$$\frac{\cos \alpha + \cos \beta + \cos \gamma}{3} \leq \sqrt{\frac{\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma}{3}} \leq \sqrt{\frac{5}{9}}, \text{ и неравенство доказано.}$$

**3. Ответ. 2.**

**Решение.** Преобразуем векторное равенство  $\overline{AB} + \overline{BC} + \overline{CD} + \overline{DA} = \overline{0}$  к виду  $\overline{AB} + \overline{CD} = \overline{CB} + \overline{AD}$  и возведем в квадрат, воспользовавшись перпендикулярностью  $AB$  и  $CD$ ,  $CB$  и  $AD$ :  $AB^2 + CD^2 = CB^2 + AD^2$ , то есть  $AB^2 + 121 = 25 + 100$ .

**4. Ответ. -5.**

**Решение.** Возьмем любые 5 чисел подряд. Сумма остальных 2010 чисел не более 2010, так как они разбиваются на группы по 15. Значит, сумма 5 чисел не меньше 5. Тогда сумма любых 15 чисел не меньше 15, тогда она равна 15, а сумма любых подряд идущих пяти равна 5. Так как  $a_{k+1} + a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5} = a_{k+2} + a_{k+3} + a_{k+4} + a_{k+5} + a_{k+6}$ , то  $a_{k+1} = a_{k+6}$  для любого  $k$ , то есть числа равны через пять. (Суммирование номеров надо понимать “по модулю 2015”, то есть за номером 2015 идет не номер 2016, а номер 1.) Значит, в любой пятерке есть 1, 2, 3, 4 и число, в сумме с этими четырьмя дающее 5, то есть число -5.

**5. Решение.** Пусть  $x_1, x_2, x_3, x_4$  — корни многочлена  $p(x)$ , такие что  $-1 \leq x_1 < x_2 < x_3 < x_4 \leq 1$ . Заметим, что длина всего отрезка равна 2, поэтому расстояние между любыми двумя точками этого отрезка не более 2. Многочлен  $p(x)$  запишем в виде  $p(x) = (x - x_1)(x - x_2)(x - x_3)(x - x_4)$ . Ясно, что  $p(x_0) < 0$  в том и только том случае, когда  $x_0 \in (x_1; x_2)$  или  $x_0 \in (x_3; x_4)$ . Рассмотрим случай  $x_0 \in (x_1; x_2)$ . Так как  $|x_0 - x_3| < 2$  и  $|x_0 - x_4| < 2$ , то  $(x_0 - x_3)(x_0 - x_4) < 4$ , а произведение  $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2)$ , как известно, достигает своего минимума, равного  $-\left(\frac{x_2 - x_1}{2}\right)^2$  в середине отрезка  $[x_1; x_2]$ . Поскольку  $x_2 - x_1 < 2$ , то  $(x_0 - x_1)(x_0 - x_2) > -1$  и  $p(x_0) > -4$ . Аналогично рассматривается случай  $x_0 \in (x_3; x_4)$ .